01. 12. 2015

Matematica – C. d. L. in Produzioni Animali e Controllo della Fauna Selvatica

Simulazione d'esame AA 2015-16

Non è permesso l'utilizzo di libri, telefoni cellulari o appunti.

1. A partire dal grafico della funzione $y = \text{sen}(x)$, disegnare il grafico della funzione
$$y = \frac{1}{\text{sen}(-x)}$$
nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.

2. In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni. Se la crescita è esponenziale, qual è laumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore?

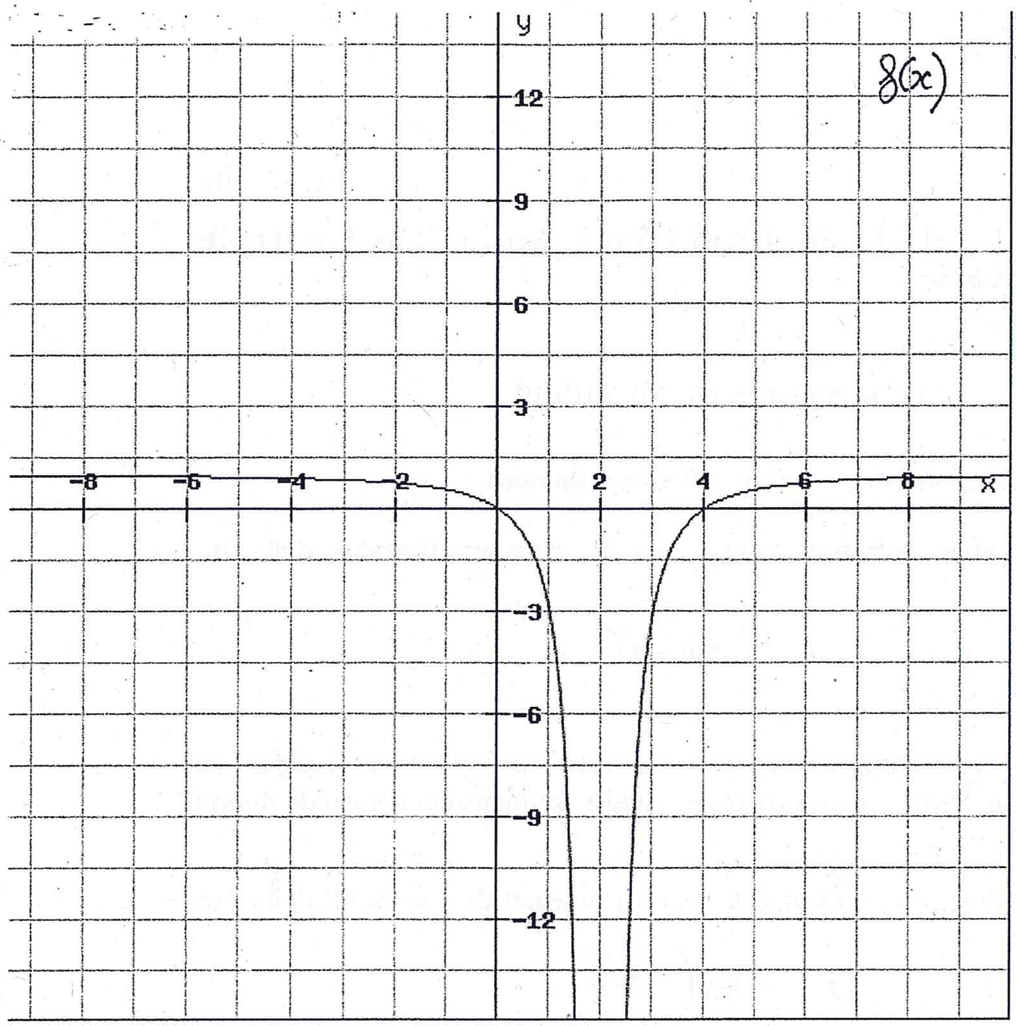
3. Determinare il dominio gli eventuali asintoti orizzontali o verticali della funzione:
$$f(x) = \log\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right).$$

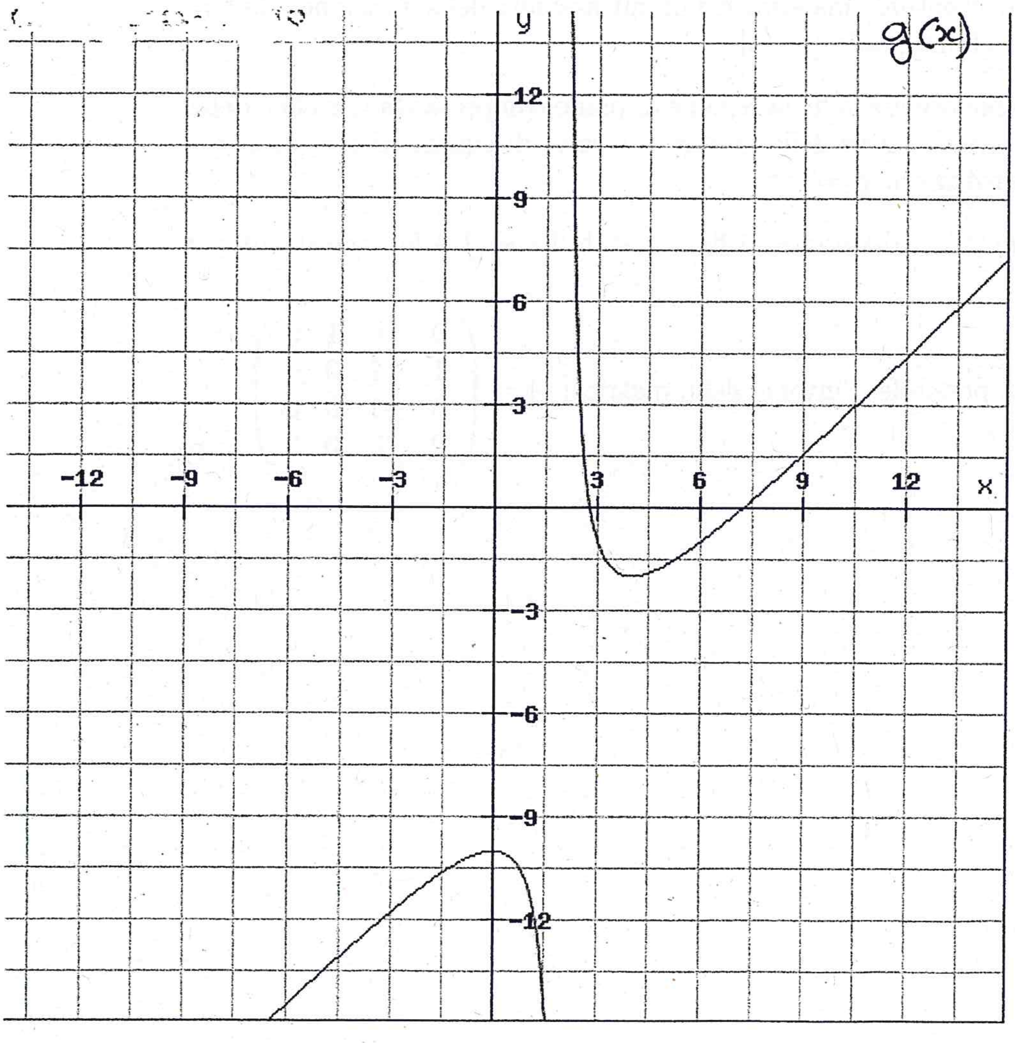
4. Determinare gli eventuali massimi e minimi assoluti della funzione $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 9$ nell'intervallo $[-1, 4]$.

5. Determinare l'area orientata della regione di piano compresa tra il grafico della funzione $h(x) = xe^{x^2}$, l'asse delle ascisse e le rette di equazioni $x = 0$, $x = 1$ (si utilizzi la sostituzione $y = x^2$).

6. Date le funzioni f e g disegnate in figura, stabilire se f è la derivata di g o viceversa.

7. Determinare, se possibile, l'inversa della matrice: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

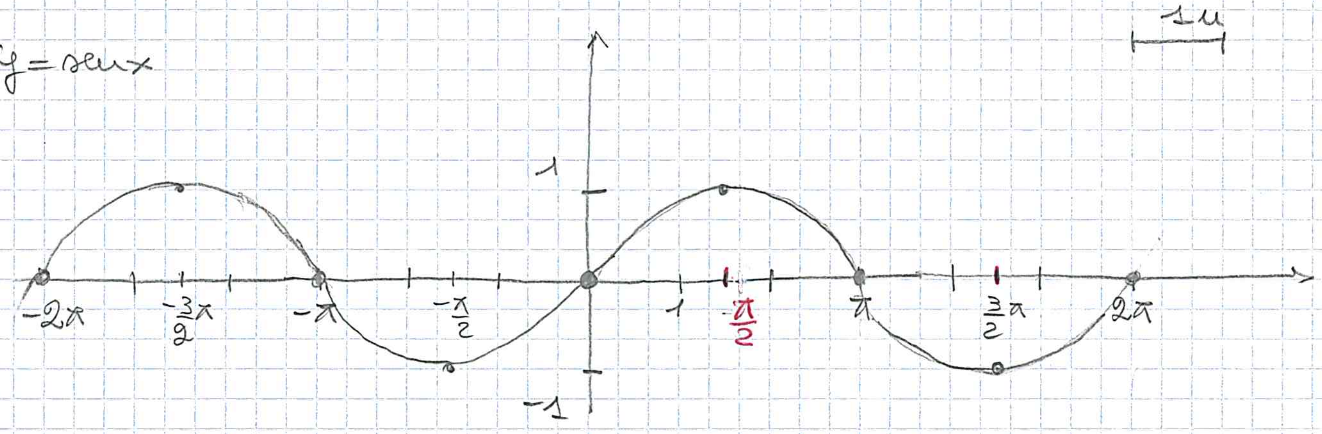

f(x)
y
12
9
6
3
-3
-6
-9
-12
-8
-6
-4
-2
2
4
6
8
x


g(x)
y
12
9
6
3
-3
-6
-9
-12
-12
-9
-6
-3
3
6
9
12
x

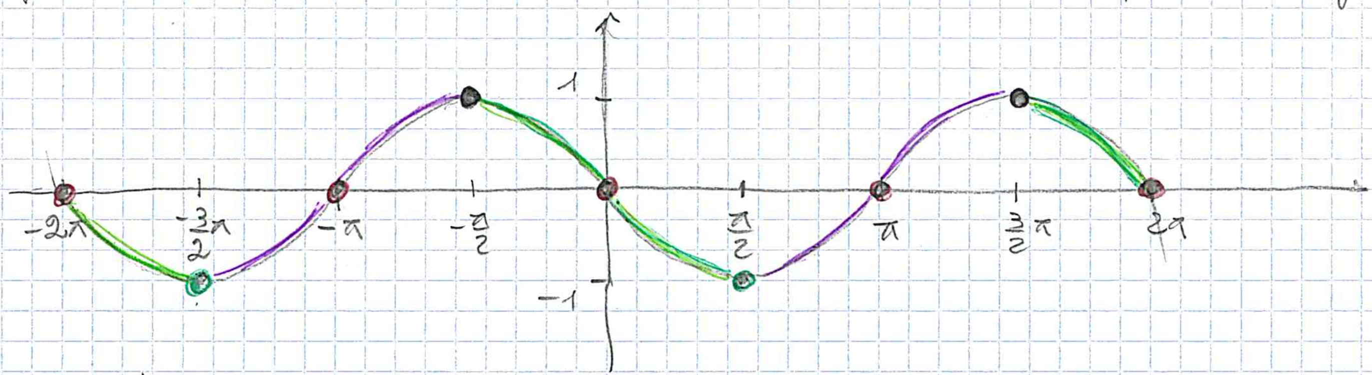
ES 1 A partire dal grafico di $y = \operatorname{sen} x$, disegnare il grafico della funzione $y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-x)}$ nell'intervallo $[-2\pi; 2\pi]$

Soluzione

$y = \operatorname{sen} x$

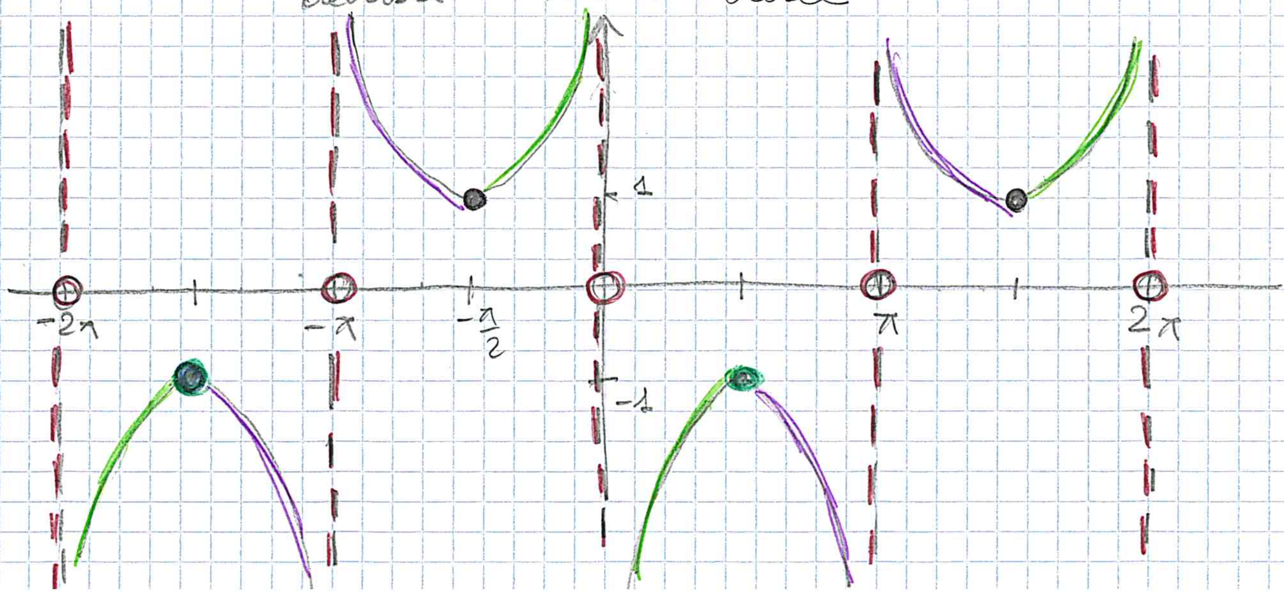


$y = \operatorname{sen}(-x)$ "ribaltamento delle x" cioè simmetria rispetto all'asse y



$y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-x)}$

- dove $\operatorname{sen}(-x) = 0 \Rightarrow$ valore escluso dal dominio (ROSSO)
- dove $\operatorname{sen}(-x) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-x)} = \dfrac{1}{1} = 1$ (NERO)
- dove $\operatorname{sen}(-x) = -1 \Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-x)} = \dfrac{1}{-1} = -1$ (VERDE)
- dove $\operatorname{sen}(-x)$ cresce / decresce $\Rightarrow \dfrac{1}{\operatorname{sen}(-x)}$ decresce / cresce (VIOLA/VERDE CHIARO)



25) In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni.
Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore?

<u>Soluzione</u>

La legge di crescita di tipo esponenziale è $N(t) = N_0 \cdot a^{\lambda t}$
con N_0 = popolazione iniziale al tempo 0, con t = tempo in giorni
Poiché dopo 2 g la popolazione è triplicata allora significa
che $N(2) = N_0 \cdot 3$. (*)
E applicando la legge per $t=2$ vale anche $N(2) = N_0 \cdot a^{\lambda \cdot 2}$ (**)
Quindi da (*) e (**) si ottiene

$$N_0 \cdot 3 = N_0 \cdot a^{\lambda \cdot 2} \quad \text{semplifico per } \frac{1}{N_0}$$

$$\frac{1}{\cancel{N_0}} \cdot \cancel{N_0} \cdot 3 = \cancel{N_0} \cdot a^{\lambda \cdot 2} \cdot \frac{1}{\cancel{N_0}}$$

$$3 = a^{\lambda \cdot 2}$$

$$3 = (a^{\lambda})^2 \quad \text{da cui posso ricavare } a^{\lambda}$$

elevando entrambi membri per $\frac{1}{3}$

$$[3]^{\frac{1}{2}} = \left[(a^{\lambda})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = a^{\lambda}$$

Quindi la legge diventa $\boxed{N(t) = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{2}t}}$
con t = tempo in giorni

- Se $t = 6$ ore $= \frac{1}{4}$ giorno $\Rightarrow N\left(\frac{1}{4}\right) = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{8}}$
popolazione dopo $\frac{1}{4}$ giorno (6h)

$$\text{aumento } \% = \frac{N(t) - N_0}{N_0} = \frac{N_0 \cdot 3^{\frac{1}{8}} - N_0}{N_0} = \frac{\cancel{N_0}\left(3^{\frac{1}{8}} - 1\right)}{\cancel{N_0}} =$$

$$= 3^{\frac{1}{8}} - 1 = 0{,}1472$$

$$= (0{,}1472 \cdot 100)\% = \underline{14{,}72\%}$$

- Se $t = 18$ ore $= 3(6\,h) = \frac{3}{4}$ giorno

$\Rightarrow N\left(\frac{3}{4}\right) = N_0 \cdot 3^{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = N_0 \cdot 3^{\frac{3}{8}}$ popolazione dopo $\frac{3}{4}$ giorno (18 h)

$$\text{aumento } \% = \frac{N(t) - N_0}{N_0} = \frac{N_0 \cdot 3^{\frac{3}{8}} - N_0}{N_0} =$$

$$= \frac{\cancel{N_0}\left(3^{\frac{3}{8}} - 1\right)}{\cancel{N_0}} = 3^{\frac{3}{8}} - 1 = 0{,}5098$$

$$= (0{,}5098 \cdot 100)\% = 50{,}98\%$$

85/ Determinare il dominio e gli eventuali asintoti orizzontali o verticali della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)$$

Soluzione

- Dominio: argomento >0

$$\frac{x+2}{x^2-1} > 0$$

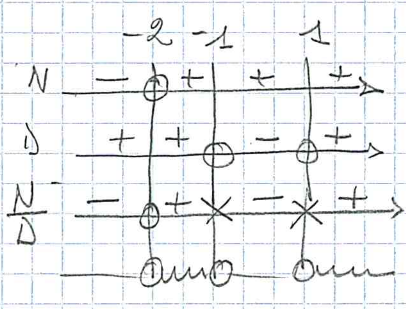
$N>0 \quad x+2>0 \quad x>-2$

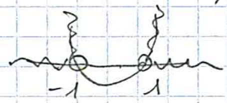
$D>0 \quad x^2-1>0$

eq. associata $x^2-1=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$





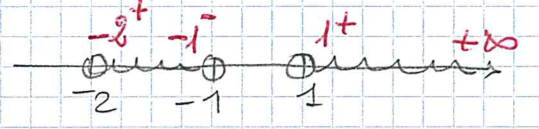
$x<-1 \,;\, x>1$

Dominio: $-2<x<-1 \ \vee \ x>1$

$]-2;-1[\ \cup \ ]1;+\infty[$

- Ricerca asintoti negli estremi aperti del dominio

Dominio : $]-2;-1[\ \cup \ ]1,+\infty[$

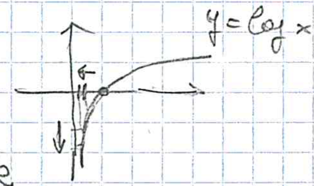


$\lim_{x\to -2^+}$ $\quad \lim_{x\to -1^-}$ $\quad \lim_{x\to 1^+}$ $\quad \lim_{x\to +\infty}$

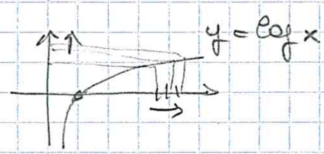
$$\lim_{x\to -2^+} \log\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right) = \log\frac{0^+}{3} = \log 0^+ = -\infty$$

$-1{,}9+2$

$(-1{,}9)$



$x=-2$ è asintoto verticale



$$\lim_{x\to -1^-} \log\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right) = \log\frac{1}{0^+} = \log(+\infty) = +\infty$$

$(-1{,}1)$ $\quad (-1{,}1)^2-1$

$x=-1$ è asintoto verticale

$$\lim_{x\to 1^+} \log\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right) = \log\frac{3}{0^+} = \log(+\infty) = +\infty$$

$(1{,}1)$ $\quad (1{,}1)^2-1$ $\quad x=1$ è asintoto verticale

$$\lim_{x\to +\infty} \log\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right) = \log\frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\log\frac{1}{x} =$$

$$= \log\frac{1}{+\infty} = \log 0^+ = -\infty$$

qui non ci sono asintoti orizzontali o verticali

ES 1 Determinare gli eventuali massimi e minimi assoluti della funzione

$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 9$ nell'intervallo $[-1, 4]$

<u>Soluzione</u>

- $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 9$ $\qquad D = \mathbb{R}$
- Calcolo $f'(x)$

  $f'(x) = -3x^2 + 6x$
- Calcolo i punti a derivata nulla cioè

  $f'(x) = 0 \qquad -3x^2 + 6x = 0$

  $\cancel{x}(-3x+6) = 0$

  $x = 0 \longrightarrow x_0 = 0 \in [-1, 4]$

  $-3x + 6 = 0 \qquad -3x = -6$

  $x = \frac{-6}{-3} = +2 \longrightarrow x_1 = +2 \in [-1, 4]$

- Calcolo i punti non derivabili (ci sono se $D' \neq D$)

  $D' = \mathbb{R} = D \Rightarrow$ <u>non</u> ci sono punti non derivabili

- tabella finale

	x_0	$f(x_0)$	
punti $f'(x)=0$	$x_0 = 0$	$f(0) = -0-0-9 = -9$	
	$x_1 = 2$	$f(2) = -(2)^3 + 3(2)^2 - 9 = -8+12-9 = \boxed{-5}$	valore di massimo assoluto
punti non derivabili	/		
estremi	$a = -1$	$f(-1) = -(-1)^3 - 3(-1)^2 - 9 = +1-3-9 = -11$	
	$b = 4$	$f(4) = -(4)^3 - 3(4)^2 - 9 = -64-48-9 = \boxed{-121}$	valore di min assoluto

-5 è il valore di massimo assoluto in $x_0 = 0$

-121 è il valore di minimo assoluto in $x_1 = 4$

B5] Determinare l'area ORIENTATA della regione di piano compresa tra il grafico della funzione $h(x) = xe^{x^2}$, l'asse delle ascisse e le rette di equazioni $x=0$, $x=1$ (per il calcolo dell'integrale si utilizzi la sostituzione $t = x^2$)

Soluzione

L'area orientata è il risultato dell' $\int_{x=0}^{x=1} h(x)\,dx$

Area ORIENTATA $[0,1] = \int_{x=0}^{x=1} x e^{x^2} dx$ metodo di sostituzione

$t = x^2$

$dt = 2x\,dx \Rightarrow x\,dx = \frac{1}{2}dt$

$$= \int_{0^2}^{1^2} e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t=1} e^t dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_{t=0}^{t=1} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[F(1) - F(0)\right] = \frac{1}{2}\left[e^1 - \underset{\underset{1}{\|}}{e^0}\right] = \frac{1}{2} e$$

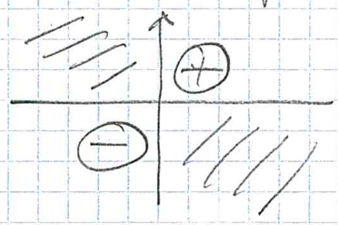
ES 1 Determinare l'area (NON orientata) della regione di piano compresa tra il grafico della funzione $h(x) = x e^{x^2}$, l'asse delle ascisse e le rette di equazioni $x=0$, $x=1$ (per il calcolo dell'integrale si utilizzi la sostituzione $t = x^2$)

__Soluzione__

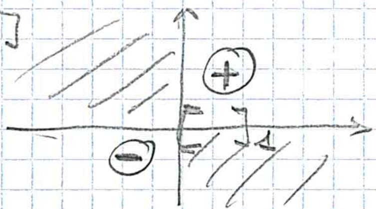
$h(x) = x e^{x^2}$ $\qquad D = \mathbb{R}$

- Studio il segno di $h(x)$ per conoscere gli intervalli di positività e negatività quindi studio

$$h(x) \geq 0 \qquad x \underbrace{e^{x^2}}_{\substack{\geq 0 \\ \text{sempre}}} \geq 0 \implies x \geq 0$$



- Calcolo l'area nell'intervallo $[0,1]$ e in quest'intervallo la funzione è positiva quindi



$$A_{[0,1]} = \int_0^1 \underbrace{h(x)}_{+}\, dx = \int_0^1 x e^{x^2} dx = (*)$$

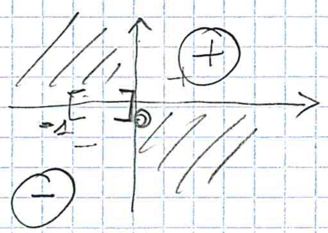
Calcola l'integrale indefinito usando la sostituzione $t = x^2$

$$\int \underbrace{x\, dx}_{=\frac{1}{2}dt}\, \underbrace{e^{x^2}}_{e^t} = \qquad \begin{aligned} t &= x^2 \\ dt &= 2x\,dx \implies x\,dx = \tfrac{1}{2}dt \end{aligned}$$

$$= \int \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

$$(*) = \left[\frac{1}{2} e^{x^2}\right]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$ controllo che sia >0

$\boxed{\text{NB}}$ Se la richiesta fosse stata di calcolare l'area tra il grafico della funzione $h(x)$, l'asse delle ascisse e le rette di equazioni $x = -1$ e $x = 0$



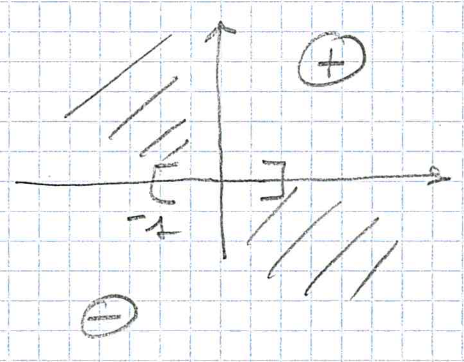
$$A_{[-1,0]} = -\int_{-1}^0 h(x)\, dx =$$

$$\int_{-1}^0 h(x)\, dx = \int_{-1}^0 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_{-1}^0 = F(0) - F(-1) =$$

$= \frac{1}{2}\underset{\overset{\|}{1}}{e^0} - \frac{1}{2}e^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e \Rightarrow A_{[-1,0]} = -\int_{-1}^{0} h(x)\,dx = -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e$

controllo che sia > 0

$\boxed{NB}$ Se le richieste fosse state quelle di calcolare l'area tra il grafico della funzione $h(x)$, l'asse delle ascisse e le rette $x=-1$, $x=1$



$$A_{[-1,1]} = -\int_{-1}^{0} h(x)\,dx + \int_{0}^{1} h(x)\,dx = (**)$$

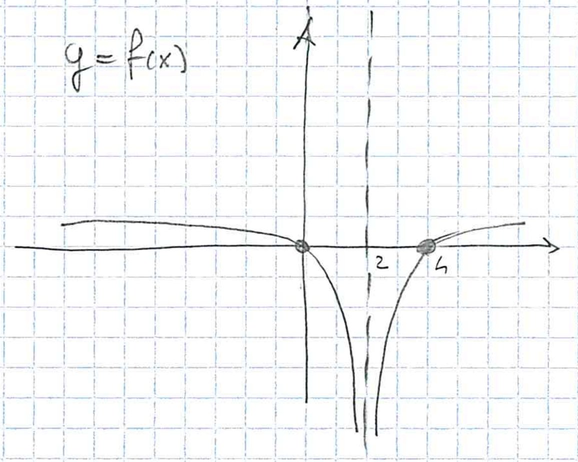
$$\int_{-1}^{0} h(x)\,dx = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$ (già calcolato in precedenza)

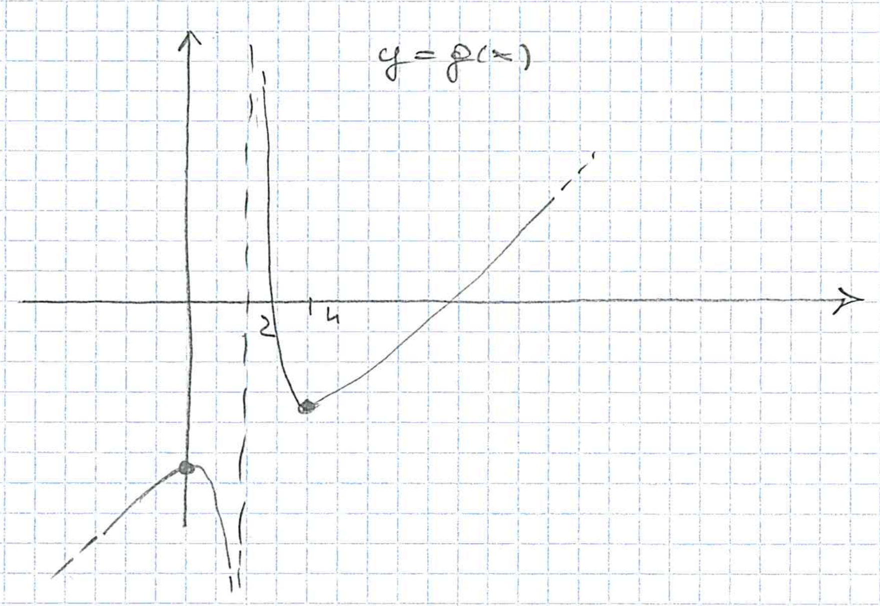
$$\int_{0}^{1} h(x)\,dx = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2}$$ (già calcolato in precedenza)

$$(**) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e\right) + \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = e - 1$$

controllo che sia > 0

BS/ Date le funzioni f e g rappresentate in figura, stabilire se f è la derivata di g o viceversa.



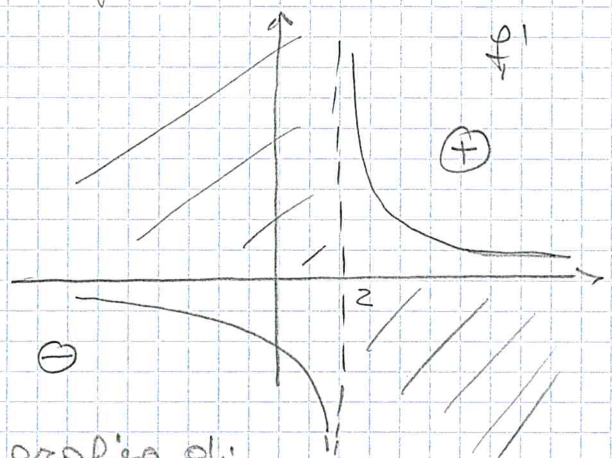


Soluzione

(A) Se f fosse la funzione allora il grafico di f' sarebbe:

- f non ha max né min né flessi a tangente orizzontale quindi f' non ha zeri
- dove f è crescente $\Rightarrow f'(x) > 0$
  dove f è decrescente $\Rightarrow f'(x) < 0$

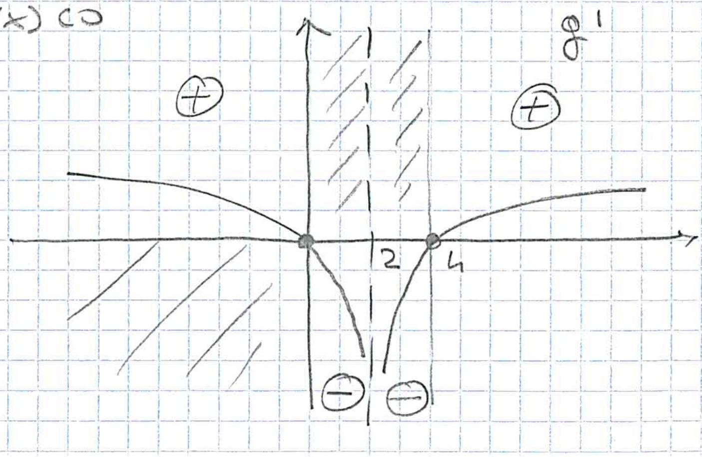
Questo grafico di f' non è quello di g.



(B) Se g fosse la funzione allora il grafico di g' sarebbe:

- dove g ha max o min relativo $\Rightarrow g'(x) = 0$
- dove g è crescente $\Rightarrow g'(x) > 0$
  dove g è decrescente $\Rightarrow g'(x) < 0$

Il grafico di g' è come quello di f.



Quindi g è la funzione e f è la sua derivata.

ES) Determinare, se possibile, l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soluzione

$$A \,\Big|\, \underset{4\times4}{I} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{NB}$ il pivot non può essere 0 quindi $R_1 + R_2 \to R_1$

$$\begin{array}{r} R_1+R_2 \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ R_2-R_1 \to \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\boxed{NB}$ il pivot non può essere 0 quindi $R_2 - R_3 \to R_2$

$$\begin{array}{r} \\ R_2-R_3 \to \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ R_3+R_2 \to \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ -R_3 \to \\ \frac{1}{3}R_4 \to \end{array} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Ora torno indietro partendo dal basso

$$R_2+R_3 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$R_1-R_3 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$R_1+2R_2 \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

A^{-1}

Verifica

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_4} \quad \text{ok}$$